$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^x t^k \,dt + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^x$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt = \ln(1+x)$

or $\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = (-1)^0\frac{x^1}{1} + \frac{(-1)^1 x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

d'où $\ln(1+x) = P_n(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt$

2°/a) Pour tout réel $t \in [0,1]$, on a : $0 \le t \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+t \le 2$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t} \le 1 \Rightarrow \frac{t^{n-1}}{1+t} \le t^{n-1}$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 , on obtient :

$\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}dt \le \int_0^1 t^{n-1}dt$ or $\int_0^1 t^{n-1}dt = \left[\frac{t^n}{n}\right] = \frac{1}{n}$ et comme m $a_n \ge 0$ on en déduit : $|a_n| \le \frac{1}{n}$.

b) On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $\left|(-1)^{n-1}a_n\right| = |a_n| \le \frac{1}{n}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}a_n = 0$.

3°/ D'après 1°/ on a :

pour tout réel $x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = P_n(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt$

en particulier pour $x = 1$, on obtient : $\ln 2 = P_n(1) + (-1)^{n-1}a_n$

$\Rightarrow -P_n(1) = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2 \Rightarrow -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2 \Rightarrow U_n = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2$

or d'après 2°/ la suite de terme général $(-1)^{n-1}a_n$ converge vers 0 donc la suite (U_n) converge vers $-\ln 2$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers $\ln\frac{1}{2}$.